

EXERCICE**PARTIE A**

On considère la fonction f définie sur $] -1, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

C_f désigne la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Montrer que f est continue sur $] -1, +\infty[$

2 .a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0, +\infty[$ on a : $0 \leq \frac{1}{x} \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt \leq x \int_0^x \frac{1}{1+t} dt$

b. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $] -1, 0[$ on a : $0 \leq \frac{1}{x} \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt \leq x \int_0^x \frac{1}{1+t} dt$

c. Vérifier que pour tout t de $] -1, +\infty[$, $\frac{1}{1+t} = 1 - t + \frac{t^2}{1+t}$

En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $] -1, +\infty[$, $x \neq 0$ on a : $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{x} \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt$

d. En exploitant les résultats des questions précédentes, montrer que f est dérivable au point 0. Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0 et étudier la position de C_f par rapport à cette tangente.

3 .Soit g la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par : $g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$

a. Etudier les variations de g

b. En déduire le signe de $g(x)$ pour $x > -1$ et donner le sens de variation de f .

4. Construire la courbe C_f .

PARTIE B

1. Justifier que pour tout réels a et b de $] -1, +\infty[$ tels que $a < b$ on a :

$$(b-a)f(b) \leq \int_a^b f(t)dt \leq (b-a)f(a)$$

En utilisant la méthode des rectangles pour $n=5$, en déduire un encadrement de l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe C_f et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$

2. Soit h l'application définie $] -1, +\infty[$ par : $h(x) = x + 1 - (x+1)\ln(1+x)$

a. Dresser le tableau de variation de h

b. En déduire que pour tout x de $] -1, 0]$ $h(x) \in]0, 1]$

c. Montrer que pour tout $x \in] -1, -\frac{1}{2}]$: $0 \leq f(x) \leq -2\ln(x+1)$

En déduire que la fonction $F : x \mapsto \int_x^{-\frac{1}{2}} f(t)dt$ est majorée dans $] -1, -\frac{1}{2}]$

3. On considère la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $V_n = \int_{-1+\frac{1}{n}}^0 f(t)dt$

Etudier le sens de variation de la suite (v_n) . En déduire que cette suite est convergente