

Let n be positive integer.

Prove that there does not exist any integer m such that

$$3n^2 + 3n + 7 = m^3$$

$$n \equiv 2 \pmod{9}$$

$$m^3 \equiv m \pmod{9}$$

$$3n^2 + 3n + 7 = m^3$$

$n \equiv \pmod{9}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$3n^2 + 3n + 7 \equiv \pmod{9}$	7	4	7	7	4	7	7	4	7

les restes possibles de $3n^2 + 3n + 7 \pmod{9}$ sont
 $\{4, 7\}$

$m \equiv \pmod{9}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$m^3 \equiv \pmod{9}$	0	1	8	0	1	8	0	1	8

les restes possibles de $m^3 \pmod{9}$ sont
 $\{0, 1, 8\}$

$\Leftrightarrow 3n^2 + 3n + 7$ et m^3 ne sont pas

congrus mod 9

par conséquent il n'existe aucun entier

$$m \text{ tq } 3n^2 + 3n + 7 = m^3$$

Ex : $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$ avec $n \in \mathbb{N}$

Passe : solve
$$\begin{cases} 8x^2 = 18y + 7xy^2 \\ 8y^2 = 18x - 7x^2y \end{cases}$$