



TEST

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

27 MARS 2022

PROBLEME1 :

Deux cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en M et N. Soit T la tangente commune à Γ_1 et Γ_2 telle que T soit plus proche de M que de N. La droite T est tangente à Γ_1 en A et à Γ_2 en B. La parallèle à T passant par M rencontre à nouveau le cercle Γ_1 en C et le cercle Γ_2 en D. Les droites (CA) et (DB) se coupent en E, les droites (AN) et (CD) se coupent en P, les droites (BN) et (CD) se coupent en Q.

1. Montrer que la droite (MN) coupe le segment [AB] en son milieu I.
2. Montrer que EP=EQ.

PROBLEME2 :

Déterminer toutes les fonctions $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x non nul :

$$\frac{1}{x} f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x$$

PROBLEME3 :

Montrer que l'équation $x^2 + y^2 = 2022$ n'admet pas de solutions entières