A.T.S.M
STAGE DE FORMATION
OLYMPPIADES
MATHEMATIQUES TUNIS
MARS 2021

PARTIE : Géométrie :

Chokri Ben jedidia

Plan de la séance

I. Puissance d'un point par rapport à un cercle
II. Théorème de Céva
III. Points cocycliques
IV. Théorème de Menelaus
V. Problèmes

Puissance d'un point par rapport à un cercle

Définition et théorème

Définition : Soient C un cercle, O un point et D une droite passant par O, sécante à C en A et B. On appelle puissance du point O par rapport au cercle C, le produit algébrique P=OAxOB

Théorème 1 : Si par un point on mène une sécante à un cercle, Le produit des mesures algébriques des deux vecteurs ayant pour origine le point O et pour extrémités les points communs au cercle et à la sécante est constant quand la sécante pivote autour du point O.

Remarque :

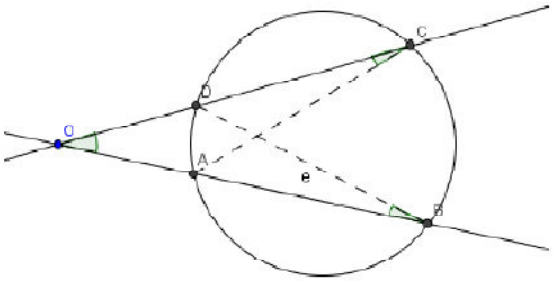
Soient [AB] et [CD] deux cordes d'un cercle $\mathscr{C}$.

Si les droites (AB) et (CD) se coupent en un point O, la connaissance des points O, A, B et C permet de construire le point D d'une manière unique.

Démonstration :

On distingue deux cas de figures.

1) Le premier cas : (O est extérieur au cercle)



Les angles $\widehat{DCA}$ et $\widehat{DBA}$, interceptent le même arc $\widehat{AD}$ donc ils sont égaux.
Par conséquent les triangles OCA et OBD sont semblables

$$\begin{cases} \widehat{OCA} = \widehat{OBD} \\ et \\ \hat{O}\ en\ commun \end{cases}$$

On peut donc écrire :

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OC}{OB}$$

On en déduit :

$$OA \times OB = OD \times OC$$

Cette relation s'écrit algébriquement de la façon suivante :

$$\overline{OA} \times \overline{OB} = \overline{OD} \times \overline{OC}$$

Car les vecteurs : $\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{OB}$ sont de même sens (arbitrairement choisit sur (AB))

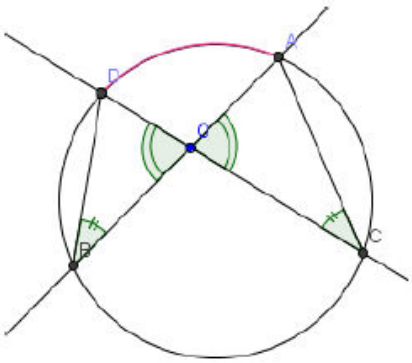
De même les vecteurs $\overrightarrow{OD}$ *et* $\overrightarrow{OC}$ sont de même sens (arbitrairement choisit sur (DC)).

2) Le deuxième cas : (O à l'intérieur du cercle)

Les triangles OAC et OBD sont semblables.

Car

$$\begin{cases} \widehat{AOC} = \widehat{DOB} \text{ deux angles opposés par le sommet} \\ \widehat{DBA} = \widehat{DCA} \text{ interceptent le même arc} \end{cases}$$



Donc :

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OC}{OB}$$

On en déduit :

$$OA \times OB = OC \times OD$$

Dans ce cas les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{OB}$ sont de sens opposés

De même pour les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ *et* $\overrightarrow{OD}$.

Algébriquement on a :

$$\overline{OA} \times \overline{OB} = \overline{OC} \times \overline{OD}$$

Conclusion : $\overline{OC} \times \overline{OD} = P$ *est une constante avec* $P = \overline{OA} \times \overline{OB}$.

Remarque :

1- $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overline{OA} \times \overline{OB}$ produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{OB}$

2- Si $O \in \mathcal{C}$ Alors $P = 0$.

Théorème 2 :

Si deux droites (AB) *et* (CD) se coupent en O, et si l'on a :

$$\overline{OA} \times \overline{OB} = \overline{OC} \times \overline{OD}$$

Alors les quatre points A, B, C et D sont sur un même cercle. On dit qu'ils sont cocycliques.

Démonstration :

Les deux droites sont sécantes, donc les points A, B et C ne sont pas alignés. Il existe donc un et un seul cercle circonscrit au triangle ABC, ce cercle coupe (OC) en un point D'.

D'après le théorème 1. $\overline{OA} \times \overline{OB} = \overline{OC} \times \overline{OD'}$

Or par hypothèse on a $\overline{OA} \times \overline{OB} = \overline{OC} \times \overline{OD}$

On en déduit : $\overline{OC} \times \overline{OD} = \overline{OC} \times \overline{OD'}$

Donc $\overline{OD} = \overline{OD'}$ Les points D *et* D' sont confondus.

Théorème de Céva:

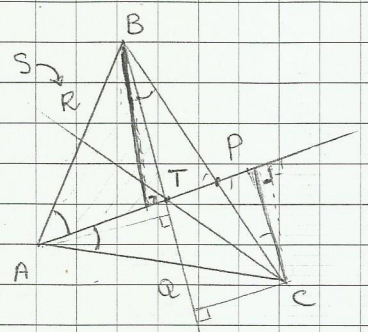
Soit ABC un triangle et P, Q, R trois points pris respectivement sur les droites (BC), (CA), (AB). Alors les droites (AB), (BQ), (CR) sont concourantes si et seulement si on a :

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

le,.....

théorème de Céva P7

Soit $\{T\} = (AP) \cap (BQ)$ et soit S le pt d'intersection des droites (TC) et (AB)



$\cos\alpha = \frac{d(B,(AP))}{BP}$ T_{BHP}

$\cos\alpha = \frac{d(C,(AP))}{PC}$ $T_{CH'P}$

$\frac{BP}{PC} = \frac{h}{h'} = \frac{h \times AT}{h' AT} = \frac{[ATB]}{[CTA]}$

de même $\frac{CQ}{QA} = \frac{[BTC]}{[ATB]}$

$\frac{AS}{SB} = \frac{[CTA]}{[BTC]}$

$\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AS}{SB} = \frac{[ATB]}{[CTA]} \times \frac{[BTC]}{[ATB]} \times \frac{[CTA]}{[BTC]} = 1.$

(AP), (BQ) et (CR) sont concourantes ssi R = S

ssi $\frac{AR}{RB} = \frac{AS}{SB}$ ssi $\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = 1.$

YAMAMA
HIGH QUALITY

le,.....

Coordonnées barycentriques. théorème de Céva. (R_2)

dans le repère Cartésien $(A, \vec{AC}, \vec{AB})$

$A(0,0)$; $C(1,0)$; $B(0,1)$; $P(k, -k+1)$

$(\vec{BP} = k\vec{BC})$

$R(0,r)$; $Q(q,0)$

$\vec{CR}\begin{bmatrix} 0-1 \\ r \end{bmatrix}$

$(CR) : rx + y + d = 0$ $\quad R \in (CR) \Leftrightarrow d = -r$

$\vec{BQ}\begin{bmatrix} q-0 \\ 0-1 \end{bmatrix}$ $\quad (CR) : rx + y - r = 0$

$(BQ) : x + qy - q = 0$

$\vec{AP}\begin{bmatrix} k \\ -k+1 \end{bmatrix}$

$(AP) : (k-1)x + ky = 0$

$$\begin{cases} rx + y - r = 0 \\ x + qy - q = 0 \\ (k-1)x + ky = 0 \end{cases}$$

$(AP), (BQ), (CR)$ sont concourantes en

ssi $\det \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

ci-d $\begin{vmatrix} r & 1 & -r \\ 1 & q & -q \\ k-1 & k & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow r[-qk] + k \times (r) \times (-1) + (k-1)q(r-1) = 0$

$\Leftrightarrow rk(q-1) + q(1k-1)(r-1) = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{rk(q-1)}{(1-k)q(1-r)} = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{k}{1-k} \times \dfrac{q-1}{q} \times \dfrac{r}{1-r} = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{BP}{PC} \times \dfrac{CQ}{QA} \cdot \dfrac{AR}{RB} = 1$ Th de Céva.

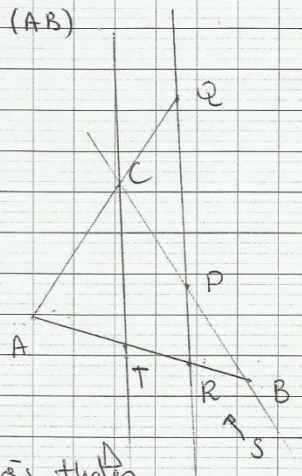
Théorème de Ménélaus :

Soit ABC un triangle et P, Q, R trois points pris respectivement sur les droites (BC), (CA), (AB). Alors les points P, Q, R sont alignés si et seulement si on a

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = -1$$

théorème de Ménélaüs. P6

Soit S l'intersection des droites (PQ) et (AB)
T l'intersection de la parallèle à (PQ) passant par C et de (AB)



d'après thalès

$\frac{PB}{PC} = \frac{BS}{ST}$, $\frac{CQ}{QA} = \frac{TS}{SA}$ $\frac{AR}{RB} =$

$\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AS}{SB} = \frac{BS}{ST} \times \frac{TS}{SA} \times \frac{AS}{SB} = -1$

P, Q, R sont alignés ssi $\frac{AR}{RB} = \frac{AS}{SB}$ soit $R = S$

$h_1 = h(S, k_1)$ tq $h_1(T) = B$
$h_2 = h(S, k_2)$ _ $h_2(A) = T$
$h_3 = h(S, k_3)$ tq $h_3(B) = A$.

$h_1 \circ h_2 \circ h_3 = id_P \rightarrow k_1 k_2 k_3 = 1$.

PROBLEME 1.

Soient Ω_1 et Ω_2 deux cercles qui se coupent en M et en N.

Soit Δ la tangente commune aux deux cercles, qui est plus proche de M que de N. Δ est tangente à Ω_1 en A et à Ω_2 en B.

La droite passant par M et parallèle à Δ rencontre Ω_1 en C et Ω_2 en D.

Soient E l'intersection des droites (CA) et (BD), P le point d'intersection des droites (AN) et (CD) et Q le point d'intersection des droites (BN) et (CD).

Montrer que EP = EQ.

PROBLEME 2.

Soient C et D deux points d'un demi-cercle de centre O.

La tangente en C (respectivement en D) au demi-cercle coupe la prolongation du diamètre de ce demi-cercle en B (respectivement en A).

On suppose de plus que les points A et B ne sont pas du même coté de O sur la prolongation du diamètre.

Soit E l'intersection des droites (AC) et (BD) et soit F le pied de la hauteur issue de E dans le triangle BEA.

Montrer que (EF) est la bissectrice de l'angle $\widehat{CFD}$

PROBLEME 3.

Soit ABC un triangle rectangle en C. Soit K le projeté orthogonal de C sur (AB).

La bissectrice de l'angle $\widehat{ACK}$ coupe le coté [AB] en E.

La parallèle à (EC) passant par B coupe (KC)en F.

Montrer que (EF) recoupe (AC) en son milieu.

PROBLEME 1.

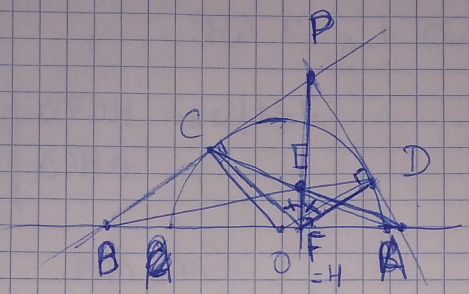
Solution Il suffit d'être logique, qualité qui permet de résoudre nombre d'exercices de géométrie : une chasse aux angles s'impose, et montre que $\widehat{ABE} = \widehat{CDE} = \widehat{MBA}$, la dernière égalité étant d'une importance capitale. De même, $\widehat{BAE} = \widehat{MAB}$. Ces égalités impliquent que M et E sont images l'un de l'autre par la symétrie par rapport à la droite (AB). Les droites (ME) et (AB) sont orthogonales, puis les droites (ME) et (PB) sont orthogonales.

Il faut également savoir reconnaître les situations classiques : ici, en notant T l'intersection des droites (MN) et (AB), il faut savoir que $TA = TB$ (cela se retrouve en calculant la puissance de T par rapport aux deux cercles : $TA^2 = TM.TN = TB^2$). Le théorème de Thalès montre alors que M est le milieu de $[PB]$. En somme, (ME) est la médiatrice de $[PQ]$. E est donc bien équidistant de P et de Q.

PROBLEME 2.

Problème 2 :

Conjecture : (EF), (BC) et (AD) sont concourants



$\{P\} = (CB) \cap (AD)$ H projeté orth de P sur (BA)

Montrons que H = F.

Mq (PH) (BD) et (AC) sont concourants en E.

$\Leftrightarrow \frac{AH}{HB} \times \frac{BC}{CP} \times \frac{PD}{DA} = 1$

or PC = PD donc il suffit :

$\frac{AH}{HB} \times \frac{BC}{DA} = 1$

on déduit $\frac{BH}{BC} = \frac{AH}{AD}$

PAH et OAD sont semblables et PBH et OBC semblables

$\begin{cases} OD \perp AD \\ PH \perp AH \end{cases}$ et $O\hat{A}D = H\hat{A}D$

$\frac{AH}{AD} = \frac{HP}{DO}$ | $\frac{BH}{BC} = \frac{HP}{CO}$

PROBLEME 3.

Solution . Soit D l'intersection de (EF) et de (AC). Les trois points D, E et F sont ainsi alignés, et l'on se retrouve dans une configuration propice à utiliser le théorème de Menelaus, qui donne :

$$\frac{AD}{CD}.\frac{CF}{FK}.\frac{KE}{AE} = 1.$$

Il suffit ainsi de montrer que $\frac{CF}{FK} = \frac{AE}{KE}$. On cherche donc à exprimer les deux rapports d'une autre manière.
Une petite chasse aux angles permet d'obtenir que $BC = BE$, et le théorème de Thalès fournit $\frac{CF}{KF} = \frac{EB}{KB}$. D'où :

$$\frac{CF}{KF} = \frac{BC}{KB}.$$

D'autre part, dans le triangle ACK, (CE) étant bissectrice de l'angle $\widehat{ACK}$, $\frac{AE}{KE} = \frac{AC}{CK}$ (propriété à connaître absolument !). Puisque les triangles ACK et BCK sont semblables, on obtient finalement :

$$\frac{AE}{KE} = \frac{BC}{BK}.$$

En définitive, $\frac{CF}{KF} = \frac{AE}{KE}$, ce qui entraîne $AD = CD$.