

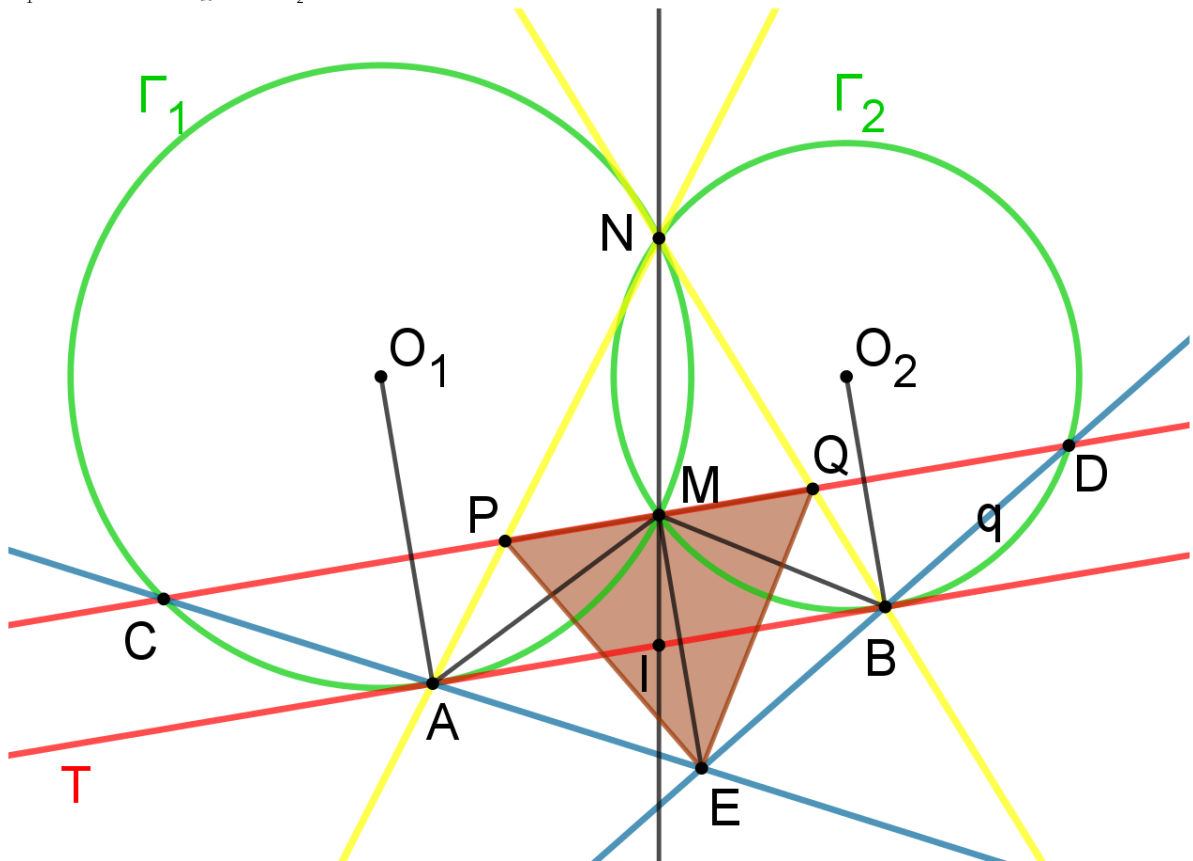
Correction du test olympiades de mathématiques
27 Mars 2022 Hammamet
Chelly Moez

Exercice 1 :

1/ Γ_1 et Γ_2 sont sécants en M et N donc la droite (MN) est l'axe radical de ces deux cercles.

$I \in (MN)$ donc il a la même puissance par rapport aux deux cercles.

Comme $P_{\Gamma_1}(I) = IA^2$ et que $P_{\Gamma_2}(I) = IB^2$ alors $IA = IB$ et $I \in [AB]$ donc I est le milieu de $[AB]$.



2/ Comme les droites (AB) et (CD) sont parallèles alors l'homothétie de centre N qui envoie A sur P va envoyer B sur Q

et puisque I est le milieu de $[AB]$ et que l'homothétie conserve le milieu alors M va être le milieu de $[PQ]$.

Appelons O_1 et O_2 les centres respectifs des cercles Γ_1 et Γ_2 .

T est tangente à Γ_1 en A et (CM) est parallèle à T donc $(AO_1) \perp (CM)$ et par suite ACM est isocèle en A d'où $AM = AC$.

Vue le parallélisme des droites (AB) et (CD) et que ACM est isocèle en A on

$$\alpha : \widehat{BAM} = \widehat{AMC} = \widehat{MCA} = \widehat{BAE}.$$

De même on montre que $\widehat{MBA} = \widehat{EBA}$.

Les triangles AMB et AEB ont ainsi deux angles égaux et le côté $[AB]$ en commun, ils sont donc isométriques et par suite $AM = AE$.

$AM = AE = AC$ donc CME est un triangle rectangle en M .

Dans le triangle EPQ la médiane $[EM]$ est perpendiculaire au côté $[PQ]$ donc ce triangle est isocèle en E

Exercice 2 :

Soit f une solution éventuelle de l'équation (E): $\frac{1}{x} f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x$.

En posant $u = \frac{1}{x}$, on obtient : $uf\left(-\frac{1}{u}\right) + f(u) = \frac{1}{u}$ ou encore $f\left(-\frac{1}{u}\right) + \frac{1}{u} f(u) = \frac{1}{u^2}$ (1)

Et en posant $u = -x$, on obtient : $-\frac{1}{u} f(u) + f\left(-\frac{1}{u}\right) = -u$ (2)

Par addition de (1) et (2), on obtient : $2f\left(-\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{u^2} - u$ soit $2f(-x) = x^2 - \frac{1}{x}$ ou encore

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x}.$$

Réciproquement :

$$\frac{1}{x} f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x} \right) + \left(\frac{1}{2x^2} + \frac{x}{2} \right) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^2} + \frac{x}{2} = x.$$

Conclusion : La seule solution de (E) définie sur $\mathbb{R}^*$ est la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x}$.

Exercice 3 :

Voici le tableau de congruence modulo 8 du carré d'un entier.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
n^2	0	1	4	1	0	1	4	1

Soient x et y deux entiers.

Les restes possibles modulo 8 de $x^2 + y^2$ sont donnés par le tableau suivant.

$\begin{smallmatrix} x^2 \\ y^2 \end{smallmatrix}$	0	1	4
0	0	1	4
1	1	2	5
4	4	5	0

Et comme $2022 \equiv 6 \pmod{8}$ alors l'équation $x^2 + y^2$ n'admet aucune solution entière.

Remarque : On peut trouver d'autres solutions