

Séance 1 olympiades 12 /4/2022

Exercice 1

Sient a, b, c des nombres positifs vérifiant $abc=1$

Montrer que $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$

Solution :

$x = \frac{1}{a} ; y = \frac{1}{b} ; z = \frac{1}{c}$ l'inégalité devient :

$$l = \frac{x^4}{y+z} + \frac{y^4}{x+z} + \frac{z^4}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq y \leq z \quad (\text{Par symétrie}) \\ \frac{x}{y+z} \leq \frac{y}{x+z} \leq \frac{z}{x+y} \quad (\text{facile}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_i \rightarrow \\ b_i \rightarrow \end{array}$$

d'après l'inégalité de Tchebyshev (Russe)

$$l \geq \frac{1}{3} (x+y+z) \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \right)$$

$$l \geq \frac{1}{3} (x+y+z+l) \Leftrightarrow l - \frac{1}{3}l \geq \frac{1}{3}(x+y+z) \\ \frac{2l}{3} \geq \frac{1}{3}(x+y+z) \\ l \geq \frac{x+y+z}{2}$$

$$l \geq \frac{x+y+z}{2}$$

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} = 1$$

$$\frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3}{2}$$

$$\text{donc } l \geq \frac{3}{2}$$

$$\text{Neobit } \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2} \quad (\text{Tch})$$

$\left\{ \begin{array}{l} f_1 \\ \text{Graphique} \end{array} \right.$

(Markov) (Russe)

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$$