Test d'évaluation

Durée : 3h

Exercice 1.

Déterminer les entiers naturels n tels que $n = (D_n)^2$

(D_n désigne le nombre de diviseurs positifs de n)

Corrigé

On peut remarquer que 1 est une solution : $1 = (D(1))^2$

n est un carré parfait donc dans sa décomposition en facteurs premiers, tous les exposants sont pairs.

$$\begin{aligned} n &= p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}; \qquad \alpha_i = 2\beta_i \\ D(n) &= (2\beta_1 + 1) \cdots (2\beta_k + 1) \end{aligned}$$

$D(n)$ est impair donc n est aussi impair par conséquent tous les p_i sont impairs d'où $p_i \geqslant 3$

$$\begin{aligned} n = (D(n))^2 &\Leftrightarrow p_1^{2\beta_1} ... p_k^{2\beta_k} = ((2\beta_1 + 1)...(2\beta_k + 1))^2 \\ &\Leftrightarrow p_1^{\beta_1} ... p_k^{\beta_k} = (2\beta_1 + 1)...(2\beta_k + 1) \end{aligned}$$

$k \in \mathbb{N}^*$, on démontre par récurrence sur k que pour $p_i \geqslant 5\,;\quad p_i^k > 2k + 1$

- ✓ Pour $k = 1\,;\, p_i > 3$ ce qui est vrai.
- ✓ Supposons que $p_i^k > 2k + 1$ et montrons que $p_i^{k+1} > 2k + 3$

$$\begin{aligned} p_i^{k+1} &= p_i\, p_i^k \\ &> 3p_i^k = 2p_i^k + p_i^k > (2k + 1) + 2 \end{aligned}$$

On revient à l'équation $p_1^{\beta_1} ... p_k^{\beta_k} = (2\beta_1 + 1)...(2\beta_k + 1)$, la seule valeur possible de p_i est 3 sinon $p_1^{\beta_1} ... p_k^{\beta_k} > (2\beta_1 + 1)...(2\beta_k + 1)$. Donc

$$n = 3^{2\beta} \qquad \text{et} \qquad (D(n))^2 = (2\beta + 1)^2$$

$n = (D(n))^2 \Leftrightarrow 3^{2\beta} = (2\beta + 1)^2 \Leftrightarrow 3^\beta = 2\beta + 1$

Pour $\beta > 1$ on a $3^\beta > 2\beta + 1$. Donc $\beta = 1$ d'où $n = 9$

Finalement les valeurs possibles de n sont 1 et 9.

Exercice 2.

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} :\longrightarrow \mathbb{N}$ vérifiant la propriété :

$$2f(f(n)) + 3f(n) = 5n + 7, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Corrigé

Pour $n = 0$

$$\begin{aligned} \underbrace{2f(f(0))}_{\geqslant 0} + 3f(0) = 7 \quad &\Rightarrow \quad 3f(0) \leqslant 7 \\ &\Rightarrow \quad f(0) \leqslant \frac{7}{3} \end{aligned}$$

donc $f(0) \in \{0;\ 1;\ 2\}$

- $f(0) = 0 \Longrightarrow 0 = 7$ ce qui est impossible
- $f(0) = 2 \Longrightarrow f(2) = \frac{1}{2}$ (impossible car f arrive dans $\mathbb{N}$)
- $f(0) = 1 \Longrightarrow 2f(1) + 3 = 7 \Longrightarrow f(1) = 2.$
  Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{f(n) = n + 1}$.
  - ✓ Le résultat est vrai pour $n = 0$
  - ✓ Supposons que le résultat est vrai jusqu'à l'ordre n
  - ✓ Montrons qu'il est vrai à l'ordre $n + 1$ (On doit prouver que $f(n + 1) = n + 2$)

$$\begin{aligned} 2f(f(n)) + 3f(n) = 5n + 7 \quad &\Longrightarrow \quad 2f(n + 1) + 3(n + 1) = 5n + 7 \\ &\Longrightarrow \quad f(n + 1) = n + 2 \end{aligned}$$

L'unique solution du problème est la fonction :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto n + 1 \end{aligned}$$

Exercice 3.

Soit ABC un triangle et D le pied de la hauteur issue de A

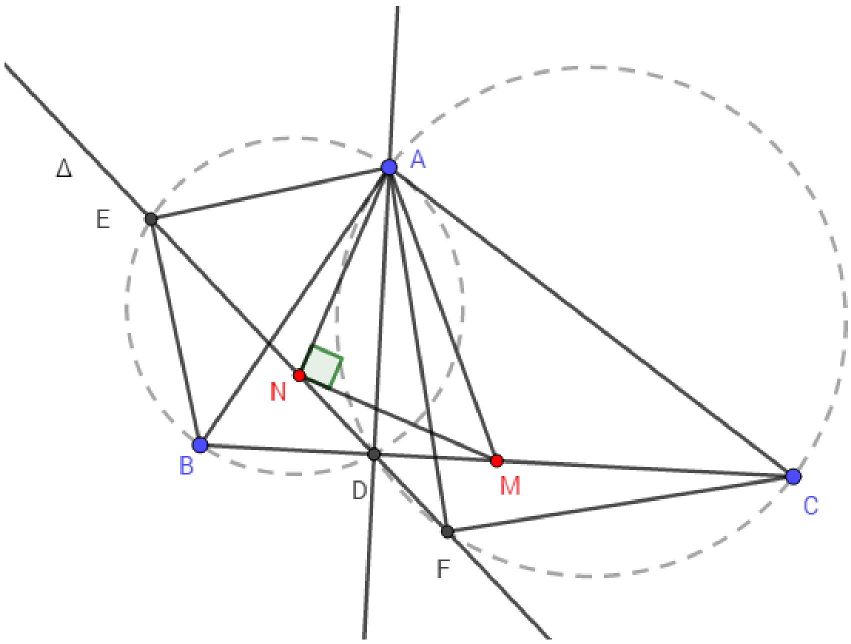
Δ est une droite quelconque passant par D et E et F sont deux points de Δ tels que

$$\widehat{AEB} = \widehat{AFC} = 90°$$

Les points M et N désignent respectivement les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[EF]$

Montrer que les droites (AN) et (MN) sont perpendiculaires.

Corrigé



$$\widehat{ADC} = \widehat{AFC} = 90° \quad \Rightarrow \quad C, A, D \text{ et } F \text{ sont cocycliques}$$
$$\Rightarrow \quad \widehat{CAF} = \widehat{CDF}$$

$$\widehat{AEB} = \widehat{ADB} = 90° \quad \Rightarrow \quad B, D, A \text{ et } F \text{ sont cocycliques}$$
$$\Rightarrow \quad \widehat{EDB} = \widehat{EAB}$$

Or $\widehat{CDF} = \widehat{EDB}$ (opposés par le sommet D), d'où

$$\widehat{CAF} = \widehat{EAB}$$

Comme $\widehat{AFC} = \widehat{AEB} = 90°$ donc les triangle AEB et AFC sont semblables.
Soit $k = \frac{AC}{AF}$ et $\theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AC}},)[2\pi]$. On a donc

$$\begin{cases} \frac{AC}{AF} = \dfrac{1}{cos(\theta)} = k \\ \\ (\widehat{\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{AB}{AE} = \dfrac{1}{cos(\theta)} = k \\ \\ (\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

Ainsi $S_d(A, k, \theta)(F) = C$ et $S_d(A, k, \theta)(E) = B$.
La similitude S_d conserve le milieu donc, $S_d(N) = M$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{NA} &= (\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AM}).\overrightarrow{NA}\\ &= \overrightarrow{NA}^2+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{NA}\\ &= \overrightarrow{NA}^2-\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}\\ &= \overrightarrow{NA}^2-AM.AN\cos(\theta)\end{aligned}$$

or $AM\cos(\theta)=AN$, puisque $S_d(N)=M$, d'où

$$\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{NA}=NA^2-AN^2=0$$

et $(AN)\perp(MN)$

Exercice 4.

Parmi les décompositions de 1 000 en somme d'entiers naturels non nuls

$$1\,000=x_1+...+x_k;\qquad x_i\in\mathbb{N}^*$$

Quelle est la décomposition qui donne un produit maximal ?
(Le produit $P=\prod_{i=1}^{k}x_i=x_1\times...\times x_k$ est maximal)

Corrigé

- Il est évident que $x_i>1$.
- Si un facteur x_i dépasse 5, on peut le remplacer par : 2 et x_i-2, qui donne un produit plus grand.
  Il en résulte que : $x_i\leqslant 4$ pour tout i.
  Remarquons que pour 4 on a l'égalité : $\boxed{4=2+2=2\times 2}$. On peut donc supposer que $x_i<4$ (en décomposant, à chaque fois, 4 sous la forme 2+2)
- On peut remplacer aussi 2+ 2+2 par 3+ 3 pour augmenter le produit $(3\times 3>2\times 2\times 2)$.

Ainsi il n' y a, dans la décomposition, que des 2 et des 3 et pas plus que deux 2.
La valeur maximale est donc attente pour

$$1\,000=\underbrace{3+3+....+3}_{332}+2+2$$

Dans ce cas le produit est : $P=3^{332}\times 2^2$
Remarque : La valeur maximale du produit est aussi atteinte pour la décomposition suivante :

$$1\,000=\underbrace{3+3+....+3}_{332}+4$$