Exercice : Les entiers premiers p tq $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ carré parfait

$p=3 \Rightarrow 1$ carré

$p=7 \Rightarrow 9$ carré

$p=2 \rightarrow$ NON

$p>2$ p impair $\Rightarrow \frac{2^{p-1}-1}{p}$ impair

$\frac{2^{p-1}-1}{p}=m^2$ m^2 impair $\Rightarrow m$ impair $\Rightarrow m^2\equiv 1 \pmod 4$

idée $p=4k+1$ ou $p=4k+3$

1er cas $p=4k+1$

$\frac{2^{p-1}-1}{p}=m^2 \Leftrightarrow 2^{p-1}-1=\underbrace{m^2p}=2^{4k}-1=\underbrace{16^k}-1$

$m^2\equiv 1 \pmod 4$, $p\equiv 1 \pmod 4$ $\Rightarrow m^2p\equiv 1 \pmod 4$ $\quad 16^k-1\equiv -1\ (4)$

$1\equiv -1 \pmod 4$ contradiction

$p=4k+3$

$k=0$, $p=3 \rightarrow \frac{2^{p-1}-1}{p}=1$ carré $\quad p=3$ solution

$k>0$ $\quad 2^{p-1}-1=2^{4k+2}-1=(2^{2k+1}-1)(2^{2k+1}+1)=\underbrace{pm^2}$

$2^{2k+1}-1$ et $2^{2k+1}+1$ sont premiers entre eux

$pm^2=pu^2v^2 \Rightarrow \begin{cases}2^{2k+1}-1=pu^2\\ 2^{2k+1}+1=v^2\end{cases}$ ou $\begin{cases}2^{2k+1}-1=v^2\\ 2^{2k+1}+1=pu^2\end{cases}$

1er cas $\begin{cases}2^{2k+1}-1=pu^2\\ 2^{2k+1}+1=v^2\end{cases} \Rightarrow 2^{2k+1}=v^2-1=(v-1)(v+1)$

$\begin{cases}v-1=2\\ v+1=4\end{cases} \Rightarrow \boxed{v=3}$ $\quad 2^{2k+1}=8 \Rightarrow 2k+1=3$ $\Rightarrow \boxed{k=1}$

$p=4k+3=7 \Rightarrow \frac{2^{p-1}-1}{p}=9$ vrai

2ème cas $\begin{cases}2^{2k+1}+1=pu^2\\ \underbrace{2^{2k+1}-1}=\underbrace{v^2}_{\equiv 1 \pmod 8}\end{cases} \Rightarrow v^2$ impair $\Rightarrow v^2\equiv 1 \pmod 8$

$2^{2k+1}-1\equiv -1 \pmod 8$

Les seuls nombres premiers p / $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ carré parfait sont $\boxed{3 \text{ et } 7}$