

Stage de formation aux olympiades de mathématiques

Test d'évaluation

Durée : 3h

Exercice 1.

Déterminer les entiers naturels n tels que $n = (D_n)^2$

(D_n désigne le nombre de diviseurs positifs de n)

Exercice 2.

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ vérifiant la propriété :

$$2f(f(n)) + 3f(n) = 5n + 7, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Exercice 3.

Soit ABC un triangle et D le pied de la hauteur issue de A

Δ est une droite quelconque passant par D et E et F sont deux points de Δ tels que

$$\widehat{AEB} = \widehat{AFC} = 90^\circ$$

Les points M et N désignent respectivement les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[EF]$

Montrer que les droites (AN) et (MN) sont perpendiculaires.

Exercice 4.

Parmi les décompositions de 1 000 en somme d'entiers naturels non nuls

$$1\,000 = x_1 + \dots + x_k; \quad x_i \in \mathbb{N}^*$$

Quelle est la décomposition qui donne un produit maximal ?

(Le produit $P = \prod_{i=1}^k x_i = x_1 \times \dots \times x_k$ est maximal)

Bon travail