

Test Blanc: Solution

Exercice 1

Étant donné trois cubes dont les longueurs des côtés sont des entiers.

Si la somme des aires des faces latérales des trois cubes est égale à 564cm^2 .

Quelles valeurs possibles peut prendre la somme des volumes des trois cubes ?

Solution 1(élève Y.Marrakchi)

$$\text{On a } 6(a^2 + b^2 + c^2) = 564 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 94$$

Supposons sans perdre la généralité que $a \geq b \geq c$, on obtient que : $a^2 \geq \frac{94}{3}$ d'où $a^2 \geq 31$

On en déduit que $a^2 \in \{36, 49, 64, 81\}$

Pour $a^2 = 36$

on a $b^2 + c^2 = 94 - 36$ d'où $2b^2 \geq 58$ donc $b^2 \geq 29$ et on déduit que $29 \leq b^2 \leq a^2 = 36$ et il résulte que $b^2 = 36$ et $c^2 = 22$ (impossible pour un entier)

Pour $a^2 = 49$

on a $b^2 + c^2 = 45$ d'où $2b^2 \geq 45$ donc $b^2 \geq 22$ et on déduit que $29 \leq b^2 \leq a^2 = 36$ et il résulte que $b^2 = 25$ ou $b^2 = 36$

Pour $b^2=25$; $c^2 = 20$ impossible

Pour $b^2=36$; $c^2 = 9$

On obtient une solution $(a, b, c) = (7, 6, 3)$

Pour $a^2 = 64$ et par un raisonnement analogue, on ne trouve pas de solutions

Pour $a^2 = 81$ et par un raisonnement analogue, on trouve $(a, b, c) = (9, 3, 2)$

Les valeurs possibles que peut prendre le volume des cubes sont 586 et 764.

Solution 2 (élève : Md Aziz B Nejma)

$$6(a^2 + b^2 + c^2) = 564 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 94 \equiv 1 \pmod{3}$$

$a \equiv \dots \pmod{3}$	0	1	2
$a^2 \equiv \dots \pmod{3}$	0	1	1

Comme tout carré est congru à 0 ou 1 modulo 3 , on obtient 2 carrés qui sont multiples de 3 et le troisième congru à 1 modulo 3

Supposons que 3 divise a^2 et b^2 : $3/a^2 \Rightarrow 3/a \Rightarrow a^2 = 9x^2$
 $3/b^2 \Rightarrow 3/b \Rightarrow b^2 = 9y^2$ on supposera $a \leq b$

$$\text{On obtient } 9x^2 + 9y^2 + c^2 = 94 \Rightarrow 9x^2 + 9y^2 \leq 94 \Rightarrow x^2 + y^2 < 11 \Rightarrow 2x^2 < 11 \Rightarrow x^2 < 6$$

$$\text{Ainsi } x \in \{1, 2\} \Rightarrow a = 3 \text{ ou } a = 6$$

Pour $a = 3$ on obtient

$$9 + 9y^2 + c^2 = 94 \Rightarrow 9y^2 + c^2 = 85 \Rightarrow 9y^2 < 85 \Rightarrow y^2 < 10 \Rightarrow y \in \{1, 2, 3\} \Rightarrow b = 3 \text{ ou } b = 6 \text{ ou } b = 9$$

Pour $a = 3$ et $b = 3$ on obtient $9 + 9 + c^2 = 94 \Rightarrow c^2 = 76$ impossible

Pour $a = 3$ et $b = 6$ on obtient $9 + 36 + c^2 = 94 \Rightarrow c^2 = 49 \Rightarrow c = 7 \Rightarrow (a, b, c) = (3, 6, 7)$

Pour $a = 3$ et $b = 9$ on obtient $9 + 81 + c^2 = 94 \Rightarrow c^2 = 4 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow (a, b, c) = (3, 9, 2)$

Pour $a = 6$ on obtient :

$$36 + 9y^2 + c^2 = 94 \Rightarrow 9y^2 + c^2 = 58 \Rightarrow 9y^2 < 58 \Rightarrow y^2 < 7 \Rightarrow y \in \{1, 2\} \Rightarrow b = 3 \text{ ou } b = 6$$

Par un raisonnement analogue, on trouve $(a, b, c) = (6, 3, 7)$ et pas de solutions pour $(a, b) = (6, 6)$

Par suite les valeurs possibles que peut prendre le volume des cubes sont 586 et 764.

Exercice 2

Un entier naturel n est dit parfait si la somme de ses diviseurs positifs est égale à $2n$.

i) Vérifier que 6 et 28 sont des entiers parfaits.

ii) Prouver qu'aucun des entiers de la forme $6k + 5$ n'est parfait.

Solution 1

i) Les diviseurs positifs de 6 sont : 1, 2, 3, 6. Leur somme est égale à $12 = 2 \times 6$

Les diviseurs positifs de 28 sont : 1, 2, 4, 7, 14, 28. Leur somme est égale à $56 = 2 \times 28$

ii) On suppose que $n = 6k + 5$ est parfait.

Il est clair que, le reste de la division euclidienne de n par 3 est 2.

Il est simple de vérifier que, n n'est pas un carré parfait, puisque les seuls restes possibles de la division euclidienne d'un carré parfait par 3, sont 0 et 1.

Ainsi, pour tout diviseur d de n , on a $d \neq \frac{n}{d}$. Les diviseurs de n peuvent être regroupés en paires

de la forme : $\left(d; \frac{n}{d}\right)$.

Puisque $n = d \cdot \frac{n}{d}$ donne un reste égal à 2 dans la division par 3, alors dans la division par 3 on a :

d donne un reste égal à 1 et $\frac{n}{d}$ donne un reste égal à 2 ou, d donne un reste égal à 2 et $\frac{n}{d}$ donne un reste égal à 1.

Dans les deux cas, $d + \frac{n}{d}$ est divisible par 3. Par conséquent la somme des diviseurs de n est divisible par 3. Puisque $2n$ n'est pas divisible par 3, n n'est pas parfait.

Solution 2 (élève : Y. Marrakchi)

i) Les diviseurs positifs de 6 sont : 1, 2, 3, 6. Leur somme est égale à $12 = 2 \times 6$

Les diviseurs positifs de 28 sont : 1, 2, 4, 7, 14, 28. Leur somme est égale à $56 = 2 \times 28$

ii) On pose $n = 6k + 5; k \in \mathbb{N}$

Remarquons que $n \equiv 2 \pmod{3}$ (reste égal 2 dans la division euclidienne de n par 3)

Pour tous diviseurs a et b de n tel que $n = a \cdot b$, on a : $a \neq b$ et :

$$[a \equiv 1 \pmod{3} \text{ et } b \equiv 2 \pmod{3}] \text{ ou } [a \equiv 2 \pmod{3} \text{ et } b \equiv 1 \pmod{3}] \quad (1)$$

Dans les cas, on a $a + b \equiv 0 \pmod{3}$ (divisible par 3).

On classe les diviseurs de n en couples d'entiers de sorte que le produit des deux entiers soit égal à n .

D'après (1), la somme des deux entiers est divisible par 3 et par suite la somme de tous les diviseurs est divisible par 3. Ceci contredit que cette somme est égale à $2n$.

Donc $n = 6k + 5$ n'est pas parfait.

Solution 3 (élève : Oussema Bouanani)

Lemme 1 : Si a, b deux entiers naturels premiers entre eux alors $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$.

Preuve: Soient $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ et $b = q_1^{\beta_1} \dots q_r^{\beta_r}$ les décompositions en facteurs premiers de deux entiers naturels premiers entre eux a et b .

$$\begin{aligned}\sigma(a)\sigma(b) &= \left(\sum_{0 \leq \mu_i \leq \alpha_i} \prod_{i=1}^k p_i^{\mu_i} \right) \cdot \left(\sum_{0 \leq \nu_i \leq \beta_i} \prod_{i=1}^r q_i^{\nu_i} \right) \\ &= \sum_{0 \leq \mu_i \leq \alpha_i} \sum_{0 \leq \nu_i \leq \beta_i} \prod_{i=1}^r q_i^{\nu_i} \prod_{i=1}^k p_i^{\mu_i}\end{aligned}$$

C'est la somme de tous les diviseurs positifs de ab .

Ainsi, $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$ $\square$

Lemme 2: Si p est un nombre premier et α un entier naturel. Alors $\sigma(p^\alpha) = 1 + p + p^2 + \dots + p^\alpha$.

Preuve: Les seuls diviseurs positifs de p^α sont les puissances de p . $\square$

Soit n un entier naturel de la forme $6k + 5$ tel que $\sigma(n) = 2n$.

Puisque $n \equiv -1 \pmod{6}$, il existe un diviseur premier p de n tel que $p \equiv -1 \pmod{6}$ et $\alpha = v_p(n)$ est impaire. Sinon, on obtient une contradiction.

Calculons $\sigma(p^\alpha)$ modulo 6.

D'après le lemme 2:

$$\begin{aligned}\sigma(p^\alpha) &= 1 + p + p^2 + \dots + p^\alpha \\ \implies \sigma(p^\alpha) &\equiv 1 - 1 + 1 - 1 \dots + 1 - 1 \pmod{6} \\ \implies \sigma(p^\alpha) &\equiv 0 \pmod{6}\end{aligned}$$

Ainsi, $6 \mid \sigma(p^\alpha)$. Or d'après le lemme 1, $\sigma(p^\alpha) \mid \sigma(n)$.

Ainsi, $6 \mid \sigma(n)$ ce qui contredit le fait que $\sigma(n) = 2n \equiv 4 \pmod{6}$.

Ainsi, aucun nombre de la forme $6k + 5$ n'est parfait. $\blacksquare$

Exercice 3

Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A et tel que $\widehat{BAC} = 40^\circ$

On désigne par S et T des points, respectivement sur (AB) et (BC) tel que $\widehat{BAT} = \widehat{BCS} = 10^\circ$.

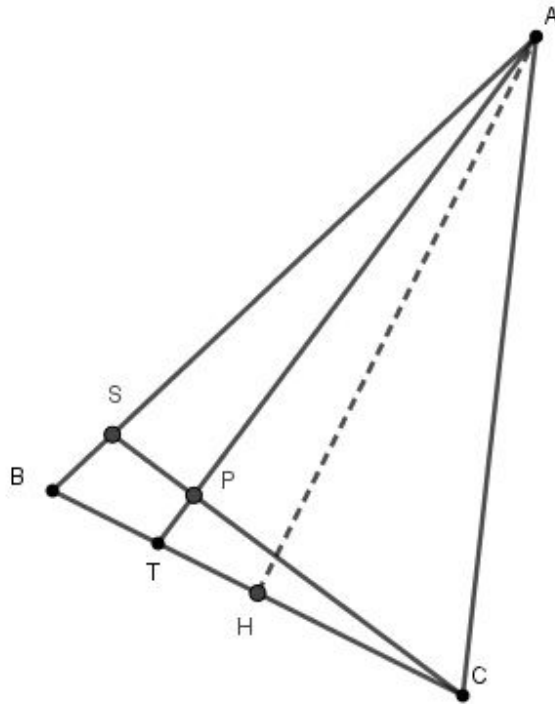
Les droites (AT) et (CS) se coupent en un point P.

Montrer que le triangle STP est rectangle et que $BT = 2PT$

Solution

$$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 70^\circ \text{ d'où } \widehat{TAC} = 40^\circ - 10^\circ = 30^\circ \text{ et } \widehat{ACS} = 70^\circ - 10^\circ = 60^\circ$$

On en déduit que $\widehat{APC} = 90^\circ$



La droite (AT) porte la bissectrice de $\widehat{BAH}$ avec H milieu de [BC]

Le théorème de la bissectrice donne $\frac{TB}{TH} = \frac{AB}{AH}$ d'où

$$TB = TH \cdot \frac{AB}{AH} = AH \tan 10^\circ \cdot \frac{AB}{AH} = AB \tan 10^\circ = AC \cdot \frac{PT}{PC} = PT \cdot \frac{AC}{PC} = PT \cdot \frac{1}{\cos 60^\circ}$$

On en déduit que $BT = 2PT$

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + n \cdot 2^n \end{cases} \text{ pour tout } n \geq 0$$

Déterminer u_n en fonction de n .

Solution

Pour tout entier $n \geq 0$; $\frac{u_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{u_n}{2^n} + \frac{n}{2}$

On pose $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_n = \frac{u_n}{2^n} \end{cases}$ pour tout $n \geq 1$ on a $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n + \frac{n}{2} \end{cases}$ pour tout $n \geq 0$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{4} \text{ Donc } x_n = x_0 + \frac{n(n-1)}{4} = 1 + \frac{n(n-1)}{4} = \frac{n^2 - n + 4}{4}$$

Donc Pour tout entier $n \geq 0$, $u_n = 2^n \left(\frac{n^2 - n + 4}{4} \right)$