

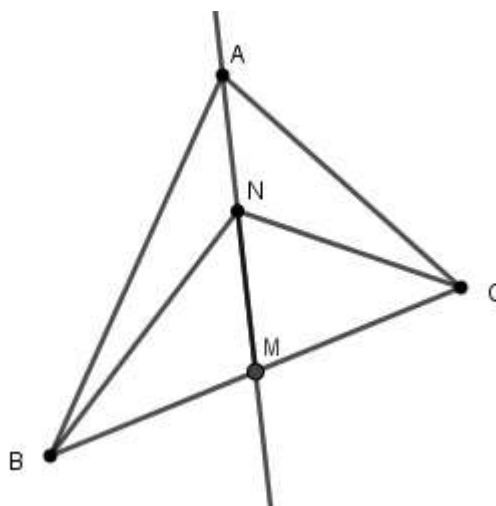
Stage de préparation aux olympiades de mathématiques

Sidi Dhrif, 18-21 mars 2021

Lemme

Dans un triangle ABC , M est le milieu de $[BC]$ et N un point du même côté que A par rapport à (BC) et tel que : $\angle BNM = \angle ABC$ (1) et $\angle CNM = \angle ACB$ (2)

Alors les points A, M et N sont alignés



Problème (AMO 2020)

Soit ABC un triangle non rectangle et H le pied de sa hauteur issue de A .

Les points I, J et K désignent les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[IJ]$.

Montrer que le cercle C_1 passant par K et tangent à la droite (AB) en I et le cercle C_2 passant par K et tangent à la droite (AC) en J se recoupent en un point K' et que H, K et K' sont alignés.

Solution

$\angle KK'J = \angle KJA$ ((JC) est tangente au cercle $KK'J$) (i)

$\angle KJA = \angle BCA$ ((IJ) // (BC)) (ii)

$\angle BCA = \angle JHC$ (JH = JC = JA) (iii)

De (i) et (ii) et (iii) on a :

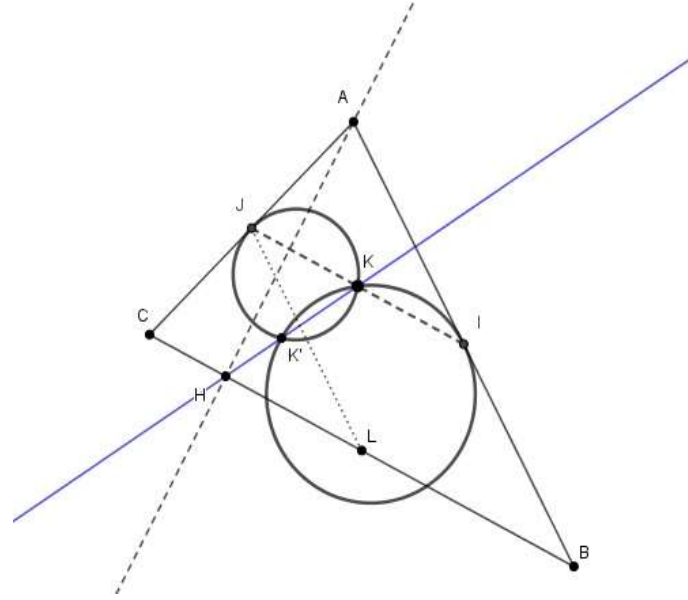
$\angle KK'J = \angle KJA = \angle BCA = \angle JHC$

$\angle JHC = \angle IJH$ (alternes internes) et par suite

$\angle KK'J = \angle IJH$

Avec le même raisonnement, on a $\angle KK'I = \angle JIH$

En appliquant le lemme sur le triangle HIJ on trouve que les points H, K et K' sont alignés.



Problème

Soit ABC un triangle et H son orthocentre.

Montrer que $\frac{AB.AC}{AH} + \frac{AB.BC}{BH} + \frac{BC.AC}{CH} \geq \frac{AB.AC}{AH} + \frac{AB.BC}{BH} + \frac{BC.AC}{CH} \geq 9 \left(\frac{AL.BC}{AB+BC+AC} \right)$

L est le pied de la hauteur issue de A à ABC

Solution

$$AB = 2R \sin \hat{C}; AC = 2R \sin \hat{B}; AH = 2R \cos \hat{A}$$

$$\frac{AB.AC}{AH} = 2R \frac{\sin B \sin C}{\cos A}$$

$$\Rightarrow \frac{AB.AC}{AH} + \frac{AB.BC}{BH} + \frac{BC.AC}{CH} = 2R \left(\frac{\sin B \sin C}{\cos A} + \frac{\sin C \sin A}{\cos B} + \frac{\sin A \sin B}{\cos C} \right) \quad (1)$$

$$\left(\frac{\sin B \sin C}{\cos A} + \frac{\sin C \sin A}{\cos B} + \frac{\sin A \sin B}{\cos C} \right) \left(\frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin C \sin A} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B} \right) \geq 9$$

$\Leftrightarrow = 2$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sin B \sin C}{\cos A} + \frac{\sin C \sin A}{\cos B} + \frac{\sin A \sin B}{\cos C} \right) \geq \frac{9}{2} \quad (2)$$

De (1) et (2) on déduit que $\frac{AB.AC}{AH} + \frac{AB.BC}{BH} + \frac{BC.AC}{CH} \geq 9R$

Mais $R \geq 2r$ et $r = \frac{S}{p} = \frac{AH \cdot BC}{AB + BC + AC}$

$$\frac{AB \cdot AC}{AH} + \frac{AB \cdot BC}{BH} + \frac{BC \cdot AC}{CH} \geq 18 \left(\frac{AH \cdot BC}{AB + BC + AC} \right)$$

Problème

Soit ABC un triangle et $M \in (AB)$; $N \in (BC)$, $P \in (AC)$

Prouver que $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} \geq \frac{12}{S}$

$$S_1 = \text{aire}(AMP); S_2 = \text{aire}(BMN); S_3 = \text{aire}(CNP); S = \text{aire}(ABC)$$

Solution

On pose $\frac{AM}{BM} = x; \frac{BN}{NC} = y; \frac{CP}{PA} = z$, on trouve que $\frac{S_1}{S} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AP}{AC} = \frac{x}{(x+1)(z+1)}$

Par analogie : $\frac{S_2}{S} = \frac{y}{(x+1)(y+1)}$ et $\frac{S_3}{S} = \frac{z}{(z+1)(y+1)}$

$$\frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S} = \frac{x}{(x+1)(z+1)} + \frac{y}{(x+1)(y+1)} + \frac{z}{(z+1)(y+1)} \geq \frac{4\sqrt{xz}}{x} + \frac{4\sqrt{xy}}{y} + \frac{4\sqrt{zy}}{z}$$

$$\frac{4\sqrt{xz}}{x} + \frac{4\sqrt{xy}}{y} + \frac{4\sqrt{yz}}{z} = 4 \left(\sqrt{\frac{z}{x}} + \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{z}} \right) \geq 4 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{z}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z}} = 12$$

Problème

Soit un triangle acutangle ABC.

Les hauteurs AA' ; BB' ; CC' recoupent le cercle déterminé par A', B', C' en A'', B'', C''

Montrer que $\frac{AA''}{AA'} + \frac{BB''}{BB'} + \frac{CC''}{CC'} = 1$

Solution

$\frac{AA''}{AA'} = \frac{AA'' \cdot AA'}{AA'^2}$ et $AA'' \cdot AA' = \rho(A) = A\Omega^2 - \frac{R^2}{4}$ avec Ω milieu de $[OH]$; O est le centre du cercle circonscrit à ABC ;

$$A\Omega^2 = \frac{2(AO^2 + AH^2) - OH^2}{4} = \frac{2(R^2 + 4R^2 - a^2) - 9R^2 + (a^2 + b^2 + c^2)}{4}$$

$$\Rightarrow A\Omega^2 = \frac{R^2 + b^2 + c^2 - a^2}{4}$$

$$\Rightarrow AA'' \cdot AA' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4}$$

$$AA' = h_a = 2R \sin B \sin C \Rightarrow \frac{AA''}{AA'} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{16R^2 \sin^2 B \cdot \sin^2 C} = \frac{2bc \cos A}{16R^2 \sin^2 B \cdot \sin^2 C}$$

$$\Rightarrow \frac{AA''}{AA'} = \frac{4R^2 \cos A \cdot \sin B \cdot \sin C}{16R^2 \sin^2 B \cdot \sin^2 C} = \frac{\cos A}{2 \sin B \sin C}$$

$$\sum \frac{AA''}{AA'} = \frac{1}{2} \sum \frac{\cos A}{\sin B \sin C}$$

$$\text{On sait que } \sum \frac{\cos A}{\sin B \sin C} = 2 \quad \text{d'où le résultat}$$