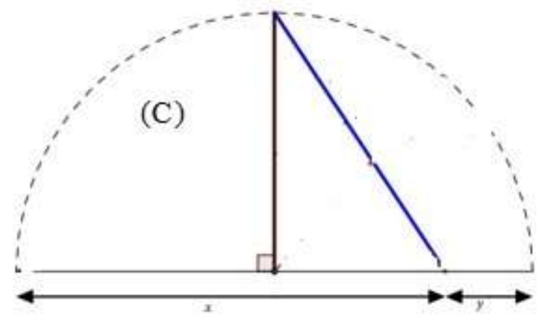
BAREME

Exercice 1 (10 points)

1) En utilisant la figure ci-contre ((C) est un demi-cercle), justifier que pour tous réels strictement positifs x et y : $\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$

2) Soient a, b, c, d, e cinq réels strictement positifs tels que $a+b+c+d+e=8$ et $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=13$

Déterminer une valeur minimale et une valeur maximale de a.



Solution & barème

1) Justification évidente **3 points**

2) $a+b+c+d+e=8 \Rightarrow b+c+d+e=8-a$

D'après 1) on a $\sqrt{\left(\frac{1}{4}(b^2+c^2+d^2+e^2)\right)} \geq \frac{1}{4}(b+c+d+e)$ **2 points**

C'est-à-dire : $\sqrt{\frac{b^2+c^2+d^2+e^2}{4}} \geq \frac{1}{4}(8-a)$ d'où $b^2+c^2+d^2+e^2 \geq \frac{(8-a)^2}{4}$ **1 point**

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geq a^2+\frac{(8-a)^2}{4} \Rightarrow a^2+\frac{(8-a)^2}{4} \leq 13$ **2 points**

$a^2+\frac{(8-a)^2}{4} \leq 13 \Rightarrow 5a^2-16a+12 \leq 0 \Rightarrow a \in \left[\frac{6}{5}, 2\right]$ **2 points**

Donc le minimum est $\frac{6}{5}$ et le maximum est 2.

Remarque :

On accorde **5 points** au candidat qui trouve $a^2+\frac{(8-a)^2}{4} \leq 13$ (les détails 2+1+2 sont pour le candidat qui n'arrive pas à cette inégalité.

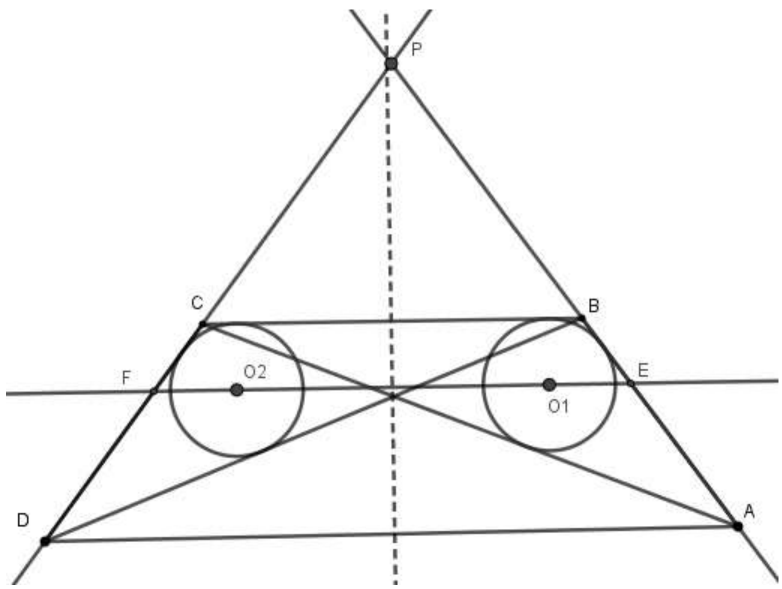
Exercice 2 (10 points)

Dans la figure ci-dessous, $ABCD$ est un quadrilatère convexe, $\Gamma_1;\Gamma_1$ les cercles inscrits aux triangles ABC et DBC. On note $O_1;O_2$ les centres respectifs de Γ_1 et Γ_1.

La droite (O_1O_2) coupent les droites (AB) et (DC) respectivement en E et F

On suppose que les droites (AB) et (DC) se coupent en un point P de la médiatrice de $[EF]$

Montrer que les points A, B, C, D sont cocycliques.



Solution & barème

$PE = PF \Rightarrow \angle PEF = \angle PFE$ (1)

O_1 est le centre de Γ_1 donc $\angle EBO_1 = \angle O_1BC$ (2) **1 point**

$\angle O_2O_1B = \angle EBO_1 + \angle PEF \Rightarrow \angle PEF = \angle O_2O_1B - \angle EBO_1$ (3)

De (2) et (3) on obtient $\angle PEF = \angle O_2O_1B - \angle O_1BC$ (4) **1 point**

De la même manière : $\angle PFE = \angle O_1O_2C - \angle FCO_2 = \angle O_1O_2C - \angle O_2CB$ (5) **1 point**

De (4) et (5) on obtient

$\angle O_2O_1B - \angle O_1BC = \angle O_1O_2C - \angle O_2CB$

$\angle O_2O_1B + \angle O_2CB = \angle O_1O_2C + \angle O_1BC$ (6) **1 point**

$\angle O_2O_1B + \angle O_2CB + \angle O_1O_2C + \angle O_1BC = 2\pi$ (7)

De (6) et (7) on obtient

$\angle O_2O_1B + \angle O_2CB = \pi$

Donc les points O_1, O_2, B et C sont sur un même cercle **3 points**

$\angle BO_1C = \angle BO_2C$

$\angle O_1BC + \angle O_1CB = \angle O_2BC + \angle O_2CB$

$\angle ABC + \angle ACB = \angle DBC + \angle DCB$

$\Rightarrow \angle BAC = \angle BDC$ **3 points**

Par conséquent les points A, B, C, D sont cocycliques.

Remarque :

On accorde **7 points** au candidat qui arrive à montrer que les points O_1, O_2, B et C sont sur un même cercle (les détails des notes sont pour le candidat qui n'arrive pas)

Attention : cette note ne s'ajoute aux notes détaillées dans le barème

Exercice 3 (10 points)

Déterminer tous les couples d'entiers naturels tels que $x^3+y^3=x^2+42xy+y^2$

Solution

On pose $d=x\wedge y$ d'où $\begin{cases} x=da \\ y=db \\ \text{avec } a\wedge b=1 \end{cases}$ donc $d(a^3+b^3)=a^2+42ab+b^2$ **2 : (1+1) points**

$(E)\Leftrightarrow \left[d(a+b)-1\right](a^2+b^2-ab)=43ab$ **2 points**

$a\wedge(a^2+b^2-ab)=1$ et $b\wedge(a^2+b^2-ab)=1$ **1 point**

Donc $\begin{cases} a^2-ab+b^2=1 \\ d(a+b)-1=43ab \end{cases}$ ou $\begin{cases} a^2-ab+b^2=43 \\ d(a+b)-1=ab \end{cases}$ **1 point**

Si $a^2-ab+b^2=1$

Alors $1=(a-b)^2+ab\geq ab\Rightarrow a=1$ et $b=1\Rightarrow d=22$ **1 point**

Conclusion: $(22,22)$ solution

Si $a^2-ab+b^2=43$

Alors $43=(a-b)^2+ab\geq(a-b)^2\Rightarrow|a-b|\leq 6$ **1 point**

Si $|a-b|=0$ alors $ab=43$ impossible

Si $|a-b|=1$ alors $ab=42\Rightarrow a=7$ et $b=6$ ou $a=6$ et $b=7$ **1 point**
$\Rightarrow 13d=43$

Impossible

Si $|a-b|=2\Rightarrow ab=39$ alors $ab=43$ impossible

Si $|a-b|=3\Rightarrow ab=34$ alors $ab=43$ impossible

Si $|a-b|=4\Rightarrow ab=27$ alors $ab=43$ impossible

Si $|a-b|=5\Rightarrow ab=18$ alors $ab=43$ impossible

Si $|a-b|=6\Rightarrow ab=7\Rightarrow a=7$ et $b=1$ ou $a=1$ et $b=7$ alors $ab=43$ impossible

Alors $8d = 8 \Rightarrow d = 1$

Conclusion : $(x, y) = (7,1)$ ou $(x, y) = (1,7)$ **1 point**

Remarques **:**

On accorde **5 points** pour le candidat qui trouve le couple solution avec justification

On accorde **6 points** pour le candidat qui trouve les couples (1,7) et (7,1) avec justification

On accorde **1 point** seulement pour toute solution parachutée

Attention : ces notes ne sont pas additives.

Exercice 4 (10 points)

Remarque : les réponses doivent être appuyées par des figures

$n = 7k \qquad k \geq 1$ Toujours possible

$$\begin{cases} n = 7k + 2 = 7(k-5) + 36; k \geq 5 \\ n = 7k + 2 = 7(k-10) + 72; k \geq 10 \\ n = 7k + 3 = 7(k-3) + 24; k \geq 3 \\ n = 7k + 4 = 7(k-8) + 60; k \geq 8 \\ n = 7k + 5 = 7(k-1); k \geq 1 \\ n = 7k + 6 = 7(k-6) + 48; k \geq 6 \end{cases}$$ tous ces cas sont toujours possibles **2 points**

Remarque :On accorde 1 point seulement pour une réponse sans figure

Examinons le cas où $n = 7k + 1$ avec $k \prec 5$

Pour n = 8 impossible (à justifier par une figure) **1point**

Pour n = 15 , 22 , 29 possibles (le justifier par une figure) **1 point**

Remarque : Il suffit de justifier le cas : n = 15

Examinons le cas où $n = 7k + 2$ avec $k \prec 10$

Pour n = 9 Impossible (le justifier par une figure) **2 points**

Pour n = 16 ; 23 ; 30 ; 37 ; 44 ; 51 ; 58 ; 65 Possibles (le justifier) **1 point**

Remarque : Il suffit de justifier le cas : n = 16

Examinons le cas où $n = 7k + 3$ avec $k \prec 3$

Pour n = 10 ; 17 possibles (le justifier par une figure) **1 point**

Remarque : Il suffit de justifier le cas : n = 10

Examinons le cas où $n = 7k + 4$ avec $k \prec 8$

Pour n = 11 ; 18 ; 25 ; 25 ; 32 ; 39 ; 46 ; 53 Possibles (le justifier) **1 point**

Remarque : Il suffit de justifier le cas : n = 11

Examinons le cas $n = 7k + 6$ avec $k \prec 6$

Pour n = 13 ; 20 ; 27 ; 34 ; 41 Possibles (le justifier) **1 point**

Remarque : Il suffit de justifier le cas : n = 13