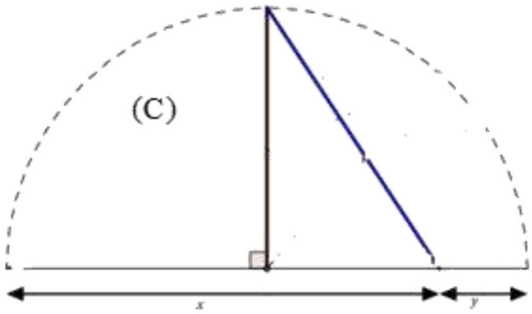
Test National de Sélection
Pour l'OPAM Mars 2021

Le 21-02-2021

Problème 1 :



1) En utilisant la figure ci-contre ((C) est un demi-cercle), justifier que pour tous réels strictement positifs x et y :

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

2) Soients a, b, c, d, e cinq réels strictement positifs tels que
$a+b+c+d+e=8$ et $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=13$

Déterminer une valeur minimale et une valeur maximale de a.

Problème 2 :

Etant donné un quadrilatère convexe ABCD et $\Gamma_1;\Gamma_1$ les cercles inscrits aux triangles ABC et DBC. On note $O_1;O_2$ les centres respectifs de Γ_1 et Γ_1.

La droite (O_1O_2) coupent les droites (AB) et (DC) respectivement en E et F

On suppose que les droites (AB) et (DC) se coupent en un point P de la médiatrice de $[EF]$.

Montrer que les points A, B, C, D sont cocycliques.

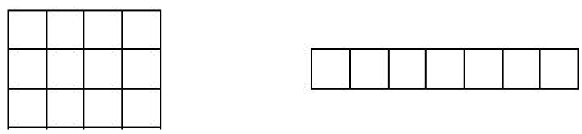
Problème 3 :

Trouver tous les couples d'entiers naturels non nuls (x, y) tels que,

$$x^3+y^3=x^2+42\,xy+y^2.$$

Problème 4 :

Soit n un entier tel que $n \geq 7$. Pour quelles valeurs de n on peut couvrir une grille $n \times n$ avec des pièces ayant les formes ci-jointes ?



Durée 4 heures
Chaque problème vaut 10 points