Association Tunisienne des Sciences mathématiques
Formation à distance aux olympiades de mathématique
Avril 2022
Thème : La combinatoire

Animateur : Salah Marzougui

Problème 1

a) Combien de triplets (x, y, z) d'entiers naturels non nuls vérifient $x+y+z=6$?
b) Déterminer le nombre de solutions entières de l'équation : $x_1+x_2+x_3=11$.
c) Combien y a-t-il d'entiers à 3 chiffres dont la somme de leurs chiffres est égale à 11 ?

Problème 2

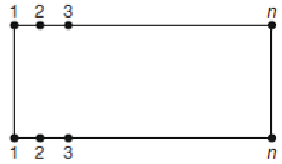
$S=\{1, 2, 3, ..., 100\}$. Trouver le nombre de parties de S contenant au moins un multiple de 5.

Problème 3

De combien de façons dix personnes, dont deux ne souhaitent pas être l'un à côté de l'autre, peuvent s'asseoir autour d'une table circulaire ?

Problème 4

2n personnes (y compris A et B) sont assis autour d'une table, n personnes de chaque côté (comme le montre la figure). Trouver le nombre de façons pour lesquelles A et B ne soient pas l'un à côté de l'autre, ni l'un en face de l'autre.



Problème 5

Il y a 7 personnes dans un groupe. Prouver que 2 parmi eux, ont le même nombre de connaissances au sein du groupe.

Problème 6

Parmi les entiers 1, 2, ..., 200, on choisit 101 entiers. Prouver que, parmi les entiers choisis, il y a deux dont l'un est divisible par l'autre.

Problème 7

Soit n un entier naturel impair. Au début, Khaled écrit sur le tableau les nombres $1, 2, ..., 2n$. Ensuite, il choisit deux nombres quelconques a, b et il les efface et il écrit à leur place $|a-b|$. Une opération qu'il répète. Prouver, qu'à la fin, il reste un entier impair.

Problème 8

Un cercle est divisé en six secteurs. Les nombres $1, 0, 1, 0, 0, 0$ sont écrits dans les secteurs (dans le sens contraire de parcours des aiguilles d'une montre, par exemple). On peut ajouter 1 à deux nombres voisins. Est-il possible d'égaliser tous les nombres par une série d'étapes pareilles ?

Problème 9

Soit Ω un ensemble de points du plan. Chaque point de Ω est le milieu de deux points de Ω.
Montrer que Ω est un ensemble infini.

Problème 10

Soit S un ensemble de 10 entiers naturels à deux chiffres. Prouver qu'il existe deux sous-ensembles de S, disjoints et ayant la même somme d'éléments.

Problème 11

On suppose que n entiers sont éliminés de l'ensemble $S=\{1, 2, ..., 2020\}$ de telle sorte qu'aucun des entiers qui restent n'est le produit de deux autres. Trouver la plus petite valeur de n qui vérifie cette propriété.

Problème 12

On veut placer, autour d'une table circulaire, 7 personnes dont 2 américains, 2 britanniques, 1 chinois, 1 allemand et 1 tunisien. De combien de façons peut-on placer ces 7 personnes de telle sorte que chaque deux personnes de même nationalité soient séparées ?

Problème 13

Prouver que, parmi un groupe de n personnes ($n > 2$), il y a au moins 2 personnes, dont le nombre d'amis, au sein du groupe, est le même.

Problème 14

On considère 6 points du plan, parmi eux il n'y a pas 3 points alignés. Chaque segment, parmi les 15 segments formés par les 6 points, est coloré rouge ou bleu. Prouver qu'il existe deux triangles monochromatiques (les deux triangles sont rouges ou les deux sont bleus ou l'un est rouge et l'autre est bleu).